単射と全射について

圏論における単射と全射について，整理してお話したいと思います。先の記事では，誤解と混同があるようです。

一般の圏　**対象**(object) と呼ばれるもの $A,\ B,\ C,\ \cdots$ と**射**(morphism)と呼ばれる $f,\ g,\ h,\ \cdots$ が次の 3 条件を満たすとき，その公理系を**一般の圏**(metacategory)という。

1°　任意の射 f に対して始域(domain)と呼ばれる対象 A と終域(codomain)と呼ばれる対象 B が存在する。このとき，

$$f : A \to B \quad \text{または} \quad A \xrightarrow{f} B$$

と表すことにする。

2°　2 つの射 $f : A \to B,\ g : B \to C$ に対して**合成**(composite)と呼ばれる射 $g \circ f : A \to C$ が存在して，合成について**結合法則**が成り立つ。

3°　任意の対象 A に対して恒等射と呼ばれる射 $1_A : A \to A$ が存在し，$f : A \to B$ および $g : B \to C$ に対して

$$1_B \circ f = f,\ \ g \circ 1_B = g$$

が成り立つ。

圏の定義　対象の集合 $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$ が定まり，任意の対象 $A,\ B \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{C})$ に対して射の集合 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(A,\ B)$ が与えられ，一般の圏の公理を満たすとき，この対象の集合と射の集合から成るものを**圏**(category)という。

単射の定義　対象 $X,\ Y$ に対して，射 $f : X \to Y$ が**単射**(monomorphism)であるとは，任意の対象 Z と射 $g,\ h \in \mathrm{Hom}(Z,\ X)$ に対して

$$f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$$

が成り立つことをいう：

$$Z \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

全射の定義　対象 $X,\ Y$ に対して，射 $f : X \to Y$ が**全射**(epimorphism)であるとは，任意の対象 Z と射 $g,\ h \in \mathrm{Hom}(Y,\ Z)$ に対して

$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$$

が成り立つことをいう：

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$$

以下，**集合の圏**(対象が集合，射が写像)の場合だけを考える。

1対1の写像の定義　集合 X, Y に対して，写像 $f: X \to Y$ が **1対1の写像**(one to one mapping)であるとは，x_1, $x_2 \in X$ に対して

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

が成り立つことをいう。これは，対偶をとって

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

と書いても同じことである。

上への写像の定義　集合 X, Y に対して，写像 $f: X \to Y$ が**上への写像**(onto mapping)であるとは，任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x)$$

となる $x \in X$ が存在することをいう。

定理　集合の圏において，集合 X, Y と写像 $f: X \to Y$ に対して

(1)　f が1対1写像 $\Longleftrightarrow$ f が単射

(2)　f が上への写像 $\Longleftrightarrow$ f が全射

が成り立つ。

〔証明〕

(1)　$Z \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$

$\Rightarrow$：f が1対1写像であると仮定すると，

$$\begin{aligned} f \circ g = f \circ h &\Longrightarrow f(g(z)) = f(h(z)) \quad (^\forall z \in Z) \\ &\Longrightarrow g(z) = h(z) \quad (^\forall z \in Z) \\ &\Longrightarrow g = h \end{aligned}$$

となって，f は単射となる。

$\Leftarrow$：f が1対1写像でないならば，

$x_1 \neq x_2$,　$f(x_1) = f(x_2)$ なる x_1, $x_2 \in X$ が存在

する。このとき，g, $h \in \mathrm{Hom}(Z,\ X)$ を

$$g(z) = x_1, \quad h(z) = x_2 \quad (z \in Z)$$

により定めると，

$$g \neq h, \quad f \circ g = f \circ h$$

となって，f は単射でない。

(2)　$X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Z$

$\Rightarrow$：f が上への写像であると仮定すると，

$$\text{任意の } y \in Y \text{ に対して，} y = f(x) \text{ となる } x \in X \text{ が存在}$$

する。$g \circ f = h \circ f$ ならば，

$$g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$$

が任意の $y \in Y$ に対して成り立つから，$g = h$ となって f は全射である。

$\Leftarrow$：f が上への写像でないとすると，

$$y_1 \notin f(X) \text{ なる } y_1 \in Y \text{ が存在}$$

する。$f(X)$ の要素 $f(x)$ を一つ固定して $Y = Z$ として，

$$g(y) = \begin{cases} f(x) & (y = y_1) \\ y & (y \neq y_1) \end{cases}, \quad h \text{ は恒等写像}$$

と定めると，

$$g \circ f = h \circ f,\ \ g \neq h$$

となって f は全射ではない。　　　　(証明おわり)

この定理の結果，集合論においては１対１写像のことを単射，上への写像のことを全射と呼んで差し支えないことになります。しかし，より本質的なことは，「1対1写像」や「上への写像」のように集合の要素に依存するかに思える概念が，「単射」や「全射」といった**集合(object)と写像(morphism)のみに依存する概念として規定できる**ということです。これはごく一部ですが，本質を抽象して枠組みだけで論じられるところが圏論の威力と魅力だと言えます。